

การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาคำละลาย (กรณีวัสดุพรุนแบบอิมิตัว) โดยเทคนิควิธีวิธีการแปรผันระยะกริด

ชยานนท์ เสริฐธิกุล¹ และ ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช²

Abstract

Serttikul, C., Ratanadecho, P.

The numerical solution of thawing process in phase change slab using variable space grid technique

Songklanakarin J. Sci. Technol., 2007, 29(5) : 1393-1405

This paper focuses on the numerical analysis of melting process in phase change material which considers the moving boundary as the main parameter. In this study, pure ice slab and saturated porous packed bed are considered as the phase change material. The formulation of partial differential equations is performed consisting heat conduction equations in each phase and moving boundary equation (Stefan equation). The variable space grid method is then applied to these equations. The transient heat conduction equations and the Stefan condition are solved by using the finite difference method. A one-dimensional melting model is then validated against the available analytical solution. The effect of constant temperature heat source on melting rate and location of melting front at various times is studied in detail.

Research Center of Microwave Utilization in Engineering (RCME), Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rungsit Campus, Klong Luang, Pathum Thani, 12120, Thailand.

¹นักศึกษาระดับปริญญาโท วิศวกรรมเครื่องกล 'Ph.D. (Mechanical Engineering), รองศาสตราจารย์ หน่วยวิจัยเพื่อการใช้ประโยชน์จากไมโครเวฟในงานวิศวกรรม (RCME) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต อำเภอคลองหลวง ปทุมธานี 12120

Corresponding e-mail: ratphadu@engr.tu.ac.th

รับต้นฉบับ 3 พฤศจิกายน 2549 รับลงพิมพ์ 28 กุมภาพันธ์ 2550

It is found that the nonlinearity of melting rate occurs for a short time. The successful comparison with numerical solution and analytical solution should give confidence in the proposed mathematical treatment, and encourage the acceptance of this method as useful tool for exploring practical problems such as forming materials process, ice melting process, food preservation process and tissue preservation process.

Key words : phase change, moving boundary, variable space grid

บทคัดย่อ

ชยานนท์ เสริฐธิกุล และ ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช

การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาคำถามละลาย (กรณีวัสดุพรุนแบบอิมตัว)

โดยเทคนิควิธีวิธีการแปรผันระยะกริด

ว. สงขลานครินทร์ วทท. 2550 29(5) : 1393-1405

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาถึงการวิเคราะห์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของกระบวนการทำละลายในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งจะพิจารณาค่าตำแหน่งของผิวละลาย (moving boundary) เป็นตัวแปรสำคัญในการศึกษาครั้งนี้ วัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่พิจารณาจะประกอบด้วย ชั้นทดสอบที่เป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ (pure ice) และชั้นทดสอบของวัสดุพรุนที่แข็งตัวมีลักษณะเป็นก้อนสี่เหลี่ยม โดยที่ภายในประกอบด้วยลูกแก้วขนาดเล็กมาก ๆ (glass bead) ผสมกับน้ำที่แข็งตัวเต็มอยู่ในรูพรุนของลูกแก้ว ซึ่งจะเรียกว่า แพคเบดของวัสดุพรุนที่แข็งตัว โดยถือว่าเป็นวัสดุพรุนแบบอิมตัว (saturated porous media) เริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบไปด้วย สมการการนำความร้อน (heat conduction equation) ในแต่ละเฟส และสมการการเคลื่อนที่ของตำแหน่งผิวละลาย (moving boundary equation) หลังจากนั้นนำสมการเหล่านี้มาประยุกต์ใช้กับวิธีการแปรผันระยะกริด (variable space grid method) ระบบสมการทั้งหมดสามารถหาคำเฉลยโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยอยู่บนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference) ในระบบ 1 มิติ ซึ่งหลังจากที่ได้ผลเฉลยจากการทำนายโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแล้ว จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าเฉลยที่ได้จากสมการแม่นยำ (exact solution) ตัวแปรสำคัญที่ใช้ในการศึกษาคือ พฤติกรรมของการทำละลายที่แตกต่างกันระหว่างกรณีของการทำละลายวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสแบบธรรมดา (แท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์) กับในกรณีของแพคเบดของวัสดุพรุนที่แข็งตัว อิทธิพลของระดับอุณหภูมิของความร้อนที่ป้อน ซึ่งมีผลต่ออัตราการทำละลาย และลักษณะการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ

จากการศึกษาพบว่าอัตราการทำละลายของทั้ง 2 กรณีมีลักษณะเป็นแบบไม่เชิงเส้นสูงในช่วงแรกของกระบวนการ และอัตราการทำละลายของแพคเบดของวัสดุพรุนที่แข็งตัวจะมีค่าสูงกว่ากรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการทำนายกับค่าที่ได้จากสมการแม่นยำพบว่ามีความใกล้เคียง และสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันซึ่งยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีพื้นฐานได้เป็นอย่างดี องค์ความรู้ที่ได้จากการวิเคราะห์สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ทั้งเป็นความรู้พื้นฐานให้กับงานวิจัยในระดับที่สูงขึ้น และเป็นประโยชน์ต่องานทางวิศวกรรมที่หลากหลายซึ่งมีความสำคัญทั้งเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน อาทิ การหลอมละลายในกระบวนการขึ้นรูปโลหะ กระบวนการแปรรูปและถนอมอาหาร หรือการถนอมเนื้อเยื่อต่าง ๆ ในด้านการแพทย์ เป็นต้น

การแก้ปัญหาคำถามเกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส หรือการเคลื่อนตัวของผิวละลายนั้นเป็นปัญหาที่นักวิจัยให้ความสนใจเป็นพิเศษ เนื่องจากมีความซับซ้อนที่เกี่ยวเนื่องกันระหว่างความไม่เป็นเชิงเส้นของเงื่อนไขขอบเขต และตำแหน่งของผิวละลาย จึงทำให้ไม่สามารถทำนายตำแหน่งการเคลื่อนตัวของ

ผิวละลายได้เพียงจากการคาดคะเนเหมือนในระบบปัญหาเชิงเส้น นอกจากนี้ปัญหาคำถามเปลี่ยนแปลงเฟสยังมีความสำคัญมากกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น การละลายของก้อนน้ำแข็งในมหาสมุทร การหลอมละลายในกระบวนการขึ้นรูปโลหะ กระบวนการแปรรูปและถนอมอาหาร

หรือการถนอมเนื้อเยื่อต่างๆ ในด้านการแพทย์ และยังมีตัวอย่างอื่นๆ อีกมากในการอธิบายถึงความสำคัญของการเปลี่ยนแปลงเฟส ทั้งในกรณีของการทำละลาย และการแข็งตัว การที่เราสามารถทำความเข้าใจกลไกของการเปลี่ยนแปลงในปรากฏการณ์ต่างๆ เหล่านี้ จะช่วยให้เราสามารถออกแบบหรือพัฒนาปรับปรุงกระบวนการที่เกี่ยวข้องให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

เมื่อพิจารณารายงานวิจัยที่ผ่านมา เริ่มต้นจากปี ค.ศ. 1860 Neumann (Carslaw and Jaeger, 1959; Muehlbauer and Sunderland, 1965) ได้ทำการศึกษาปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสที่มี 1 เฟส (one phase change problem) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่มีอุณหภูมิคงที่จนสามารถหาคำตอบของปัญหาที่อยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นยำตรงในกรณี 1 มิติได้สำเร็จ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 Stefan (Rubinstein, 1971) ได้ศึกษาปัญหาเพิ่มเติมจนสามารถหาผลเฉลยในกรณีการเปลี่ยนแปลงเฟสในลักษณะสองเฟสพร้อมกัน (two phase change problem) ได้เช่นกัน กล่าวได้ว่านักวิจัยทั้งสองคนนี้ถือเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสในยุคต่อมา ซึ่งทำให้สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้หลากหลายวิธี เช่น วิธี Neumann's Solution (Crank, 1981) วิธี Similarity transformation method (A.B. Taylor, 1974) หรือวิธี Heat balance integral methods (Goodman, 1961)

หลังจากนั้นต่อมาได้มีการพัฒนาเพื่อนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยแบบใหม่ โดยใช้หลักการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการประมาณหาคำตอบ เช่น Murray และ

Landis (Murray, 1959) ได้ทำการเปรียบเทียบระหว่างวิธีแปรผันระยะกริด (variable space grid method) กับวิธีกำหนดระยะห่างกริดแบบคงที่ (fixed space grid method) ซึ่งพบว่าวิธีแรกนั้นมีความแม่นยำมากกว่า เนื่องจากมีความคลาดเคลื่อนขณะเริ่มต้นน้อยกว่า นอกจากนี้ Mastanaiah (1976) ได้ศึกษากระบวนการเปลี่ยนแปลงเฟสโดยใช้วิธี Taylor' forward projection method และทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผลเฉลยแม่นยำตรงพบว่ามีความสอดคล้องและใกล้เคียงกันของค่าทั้งสอง

สำหรับบทความนี้จะนำเสนอปัญหาของการทำละลายในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทั้งในกรณีที่เป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ และ แผลเบคของวัสดุพูนที่แข็งตัว (น้ำแข็ง+วัสดุพูน) โดยตัวแปรที่ทำการศึกษาคืออิทธิพลของอุณหภูมิที่ละลายที่มีต่อวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทั้งสอง ลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวละลาย โดยวิธีที่นำเสนอในบทความนี้คือวิธีการแปรผันระยะกริด ซึ่งเป็นวิธีแปลงพิกัดเพื่อใช้ร่วมกับวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ และมีความแม่นยำค่อนข้างสูง เพื่อเปรียบเทียบกับพฤติกรรมในกรณีของการทำละลายวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่สภาวะต่างๆ โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและโดยผลเฉลยแม่นยำตรงวิธี Similarly Transformation Method (Carslaw and Jaeger, 1959)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1. รูปแบบจำลองทางกายภาพ

ลักษณะของแบบรูปร่างจำลองทางกายภาพที่จะทำการศึกษาแสดงใน Figure 1 กล่าวคือ วัสดุเปลี่ยนแปลง

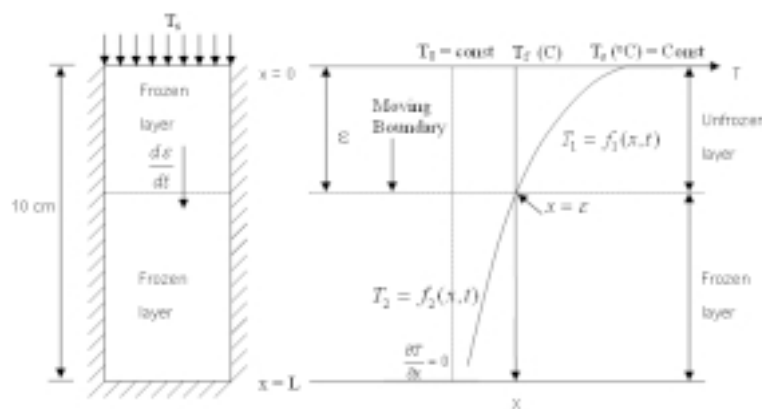


Figure 1. Physical model of problem

เฟสที่ใช้ในการทดลองมี 2 ชนิด คือ กรณีที่เป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ และแท่งของวัสดุพูนที่แข็งตัว (น้ำแข็ง+วัสดุพูน) มีความยาวทั้งหมดเท่ากับ 10 ซม. ซึ่งมีอุณหภูมิเริ่มต้นสม่ำเสมอเท่ากับ -30 ด้านบนถูกให้ความร้อนซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 40°C, 70°C และ 100°C ตามลำดับ ส่วนลักษณะการเคลื่อนที่ของผิวละลายจะทำการพิจารณาเฉพาะในทิศทางหนึ่งมิติ คือ แกน X และมีการถ่ายเทความร้อนเฉพาะแกนที่พิจารณาเท่านั้น โดยในที่นี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์จะพิจารณาให้มีชั้นของโซนของเหลว (un-frozen layer) เนื่องจากการทำละลายเกิดขึ้นตั้งแต่ต้น

จาก Figure 1 แสดงให้เห็นถึงเส้นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทั้งในบริเวณโซนของเหลว และโซนของแข็ง (Frozen layer) โดยที่การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในโซนของเหลวจะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ T_1 เช่นเดียวกับในโซนของแข็งที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในรูปฟังก์ชันของ T_2 โดยที่ T_0 คือค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสขณะที่ยังไม่ได้รับความร้อน T_s คือค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งผิวละลาย ส่วน T_f คือค่าอุณหภูมิคงที่ที่ป้อนให้แก่วัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทางด้านบน และที่ตำแหน่ง $X = \epsilon$ ที่เป็นระยะที่บอกตำแหน่งของผิวละลายจึง จะค่อยๆ เคลื่อนที่ไปในทิศทางแกน X มากขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้เกิดการขยายบริเวณที่เป็นโซนของเหลวมากขึ้นด้วย

กล่าวโดยสรุปจากแบบจำลองทางกายภาพ (physical model) ที่จะทำให้การศึกษาจะอยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมมุติฐานดังนี้

- 1) ระบบที่พิจารณาเป็นระบบ 1 มิติ
- 2) พิจารณาเฉพาะผลของการนำความร้อนเท่านั้น
- 3) ไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส เนื่องจากการทำละลาย
- 4) กำหนดให้วัสดุพูนแบบอิมิตัวที่พิจารณามีลักษณะเป็น homogeneous

และในส่วนของเงื่อนไขของระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์ กำหนดให้ระบบที่พิจารณามีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

- 1.1 เงื่อนไขเริ่มต้น
 - 1) ณ ตำแหน่งที่ $0 < x < L, t = 0, T = T_0 = -30^\circ\text{C}$
- 1.2 เงื่อนไขขอบเขต

- 1) ณ ตำแหน่งที่ $x = 0, t \geq 0, T = T_s = \text{Const}$
- 2) ณ ตำแหน่งที่ $x = L, t \geq 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- 3) ณ ตำแหน่งที่ $x = \epsilon, t > 0, T_1 = T_2 = \text{Const} = T_f = 0^\circ\text{C}$

2. รูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน เมื่อพิจารณาเฉพาะการนำความร้อนที่ถ่ายเทผ่านปริมาตรควบคุมใดๆ ในที่นี้จะพิจารณาเป็นกรณีการถ่ายเทความร้อนแบบหนึ่งมิติ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้อธิบายการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในบริเวณโซนของเหลว และภายในบริเวณโซนของแข็งในกรณีหนึ่งมิติ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

โดยที่ค่า α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายตัวของความร้อน (thermal diffusivity)

j คือ ตำแหน่งใดๆ ในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส

เนื่องจากปัญหาที่ทำการศึกษาในครั้งนี้เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ซึ่งเกี่ยวข้องต่อการเปลี่ยนแปลงเฟสและการเคลื่อนตัวของขอบเขต ดังนั้นในการวิเคราะห์จะต้องเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดแกน (coordinate transformation) และเมื่อสังเกตจาก Figure 2 จะพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป ที่จุดหรือตำแหน่งใดๆ ที่พิจารณาจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น ในขณะที่เดียวกันตำแหน่ง

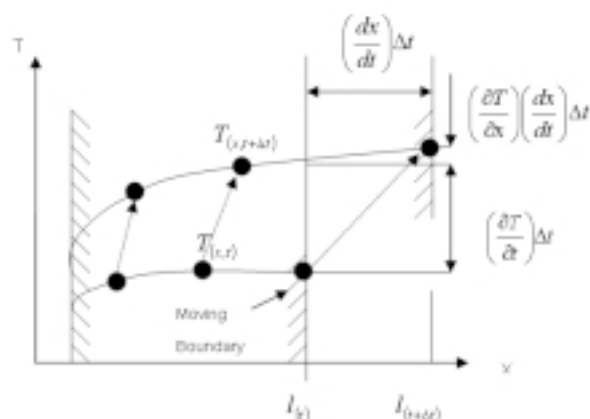


Figure 2. Transformation of coordinate

ก็เปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิมด้วย ซึ่งเมื่ออาศัยหลักการการแปลงพิกัดแกนจะได้ผลต่างของอุณหภูมิ (ΔT) มีค่าดังนี้

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\Delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\Delta t \quad (2)$$

ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (3)$$

หลังจากนั้นพิจารณาหลักการของวิธีแปรผันระยะกริดซึ่งถือเป็นวิธีการหนึ่งในการทำให้กริดที่สร้างขึ้นเคลื่อนที่ไปตามผิวรอยต่อที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้ ถ้าหากเราทำการกำหนดให้ระยะของบริเวณโซนของเหลว หรือที่ระยะของ $x < \varepsilon$ ทารด้วยจำนวนของกริดในบริเวณโซนของเหลวที่พิจารณา (n_l) มีค่าเท่ากับระยะของแต่ละกริดที่อยู่ในบริเวณโซนของเหลว Δx_l แล้ว เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ $\Delta x_l = \frac{\varepsilon}{n_l}$ เช่นเดียวกับในบริเวณของโซนของแข็ง ($x < \varepsilon$) หากเรานำระยะที่เหลือในส่วนที่เป็นโซนของแข็ง ($L < \varepsilon$) ทารด้วยจำนวนของกริดที่มีอยู่ในบริเวณโซนของแข็ง $n_s - i_s$ โดยที่ n_s คือ จำนวนของกริดในบริเวณโซนของแข็งที่พิจารณา i_s คือ ลำดับของตำแหน่งของกริดที่พิจารณา เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดในโซนของแข็งที่ลดลงเนื่องจากการขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

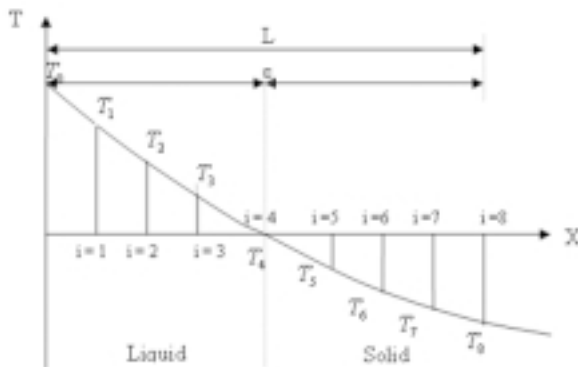


Figure 3. Description for variable space grid method

$$\Delta x_s = \frac{(L - \varepsilon)}{n_s - i_s} \quad \text{ซึ่งจากที่อธิบายมาทั้งหมดสามารถอธิบายได้}$$

ดัง Figure 3

จาก Figure 3 เมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ $x = 0$ ถึงระยะ $x = \varepsilon$ แล้ว จะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายใน จะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4)$$

กล่าวคืออัตราการขยายตัวของผิวละลายที่เคลื่อนที่ไปทางขวา $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ ทารด้วยระยะจากด้านที่ fixed ด้านซ้ายไปจนถึงระยะของผิวละลาย ($n_l \cdot \Delta x$) ย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt}$ ณ จุดใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือทารด้วยระยะจากด้านที่ fixed ด้านซ้ายไปจนถึงจุดที่พิจารณา ($i_l \cdot \Delta x$) ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i_l}{n_l} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5)$$

จากสมการที่ (5) เมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (3) จะได้สมการ ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{i_l}{n_l} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}\right) \quad (6)$$

จากนั้นนำสมการที่ (6) แทนลงในสมการที่ (1) ก็จะได้สมการความร้อน (Heat Equation) ในรูปทั่วไปสำหรับกรณีในบริเวณที่เป็นของเหลว ดังนี้

$$\frac{dT_l}{dt} = \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_l^2} + \left(\frac{\partial T_l}{\partial x_l}\right) \cdot \left(\frac{i_l}{n_l} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}\right) \quad (7)$$

หลังจากนั้นเมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ $x = \varepsilon$ ถึงระยะ $x = L$ แล้ว จะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายในจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

กล่าวคืออัตราการขยายตัวของผิวละลายที่เคลื่อนที่ไปทางขวา $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ หารด้วยระยะจากตำแหน่งผิวละลายถึงด้านปลายที่ $x = L$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(L - \varepsilon)$ และมีค่าเท่ากับ $(n_i \cdot \Delta x)$ นั้นย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt}$ ของผิวละลายใดๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะตั้งแต่ผิวละลายใดๆ ถึงด้านปลายที่ $x = L$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $((n_s - i_s) \cdot \Delta x)$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้สมการ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n_s - i_s}{n_s} \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{8}$$

ดังนั้น สำหรับกรณีในบริเวณที่เป็นของแข็ง

$$\frac{dT_s}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_s^2} + \left(\frac{\partial T_s}{\partial x_s}\right) \cdot \left(\frac{n_s - i_s}{n_s} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}\right) \tag{9}$$

จาก Figure 1 ทำการสมดุลความร้อนที่ผิวละลาย ($x = \varepsilon$) จะได้

$$L_s \rho_s \frac{d\varepsilon}{dt} = q_{in} - q_{out} \tag{10}$$

$$L_s \rho_s \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(-\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l}\right) - \left(-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s}\right) \tag{11}$$

ดังนั้นจะได้สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (moving boundary equation) ดังนี้

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L_s \rho_s} \left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l}\right) \tag{12}$$

จากสมการที่ (12) เนื่องจากสมมติฐานที่ไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรจึงกำหนดให้ค่าความหนาแน่นของของแข็ง ρ_s มีค่าคงที่

รูปแบบสมการในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้น จะถูกนำไปแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยคำตอบโดยวิธีการ Finite Difference Method ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าของผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขชนิดหนึ่ง เพื่อหาอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป เนื่องจากการนำความร้อน และลักษณะการเปลี่ยนแปลงเฟสหรือตำแหน่งการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ซึ่งสามารถแสดงเป็นระบบสมการในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ดังนี้

1. สมการความร้อน กรณีในบริเวณที่เป็นของเหลว

จากสมการ (7)

$$\frac{dT_l}{dt} = \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_l^2} + \left(\frac{\partial T_l}{\partial x_l}\right) \cdot \left(\frac{i_l}{n_l} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}\right)$$

จะได้

$$\frac{T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} - T_{l(i)}^{t, n}}{\Delta t} = \alpha_1 \frac{T_{l(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - 2T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} + T_{l(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{(\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)})^2} + \frac{T_{l(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{l(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{2\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)}} \cdot \frac{i_l}{n_l} \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^{t+\Delta t, (n)} \tag{13}$$

2. สมการความร้อน กรณีในบริเวณที่เป็นของแข็ง
จากสมการ (9)

$$\frac{dT_s}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_s^2} + \left(\frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) \cdot \left(\frac{n_s - i_s}{n_s} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

จะได้

$$\frac{T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} - T_{s(i)}^{t, n}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{s(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - 2T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} + T_{s(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{(\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)})^2} + \frac{T_{s(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{s(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{2\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)}} \cdot \frac{n_s - i_s}{n_s} \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{t+\Delta t, (n)} \quad (14)$$

3. สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย
จากสมการ (12)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L_s \rho_s} \left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right)$$

จะได้

$$\frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)} - \varepsilon^t}{\Delta t} = \frac{1}{L_s \rho_s} \left(\lambda_s \frac{-3T_{ls} + 4T_{s(l)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{s(2)}^{t+\Delta t, (n)}}{2\Delta x_s^{t+\Delta t, (n-1)}} - \lambda_l \frac{3T_{ls} - 4T_{l(n_1-1)}^{t+\Delta t, (n)} + T_{l(n_1-2)}^{t+\Delta t, (n)}}{2\Delta x_l^{t+\Delta t, (n-1)}} \right) \quad (15)$$

โดยที่

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{t+\Delta t, (n)} = \frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)} - \varepsilon^t}{\Delta t} \quad (16)$$

$$\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)} = \frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)}}{n_l} \quad (17)$$

$$\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)} = \frac{L - \varepsilon^{t+\Delta t, (n)}}{n_s} \quad (18)$$

โดยที่

- t คือ เวลา
- Δt คือ เวลาที่เพิ่มขึ้น
- n คือ จำนวนรอบของการคำนวณซ้ำ
- l คือ โซนของเหลว
- s คือ โซนของแข็ง
- L คือ ความยาวทั้งหมดของวัสดุทดสอบ
- ε คือ ตำแหน่งของขอบเขตผิวละลาย

4. สำหรับเงื่อนไขในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีดังนี้

4.1 กำหนดช่วงเวลา Δt (time step) มีค่าเท่ากับ 1 วินาที สำหรับการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและตำแหน่งของรอยต่อระหว่างเฟสหรือผิวละลาย

4.2 จำนวนกริดที่สร้าง แบ่งเป็นกริดในบริเวณโซนของเหลว (n_l) เท่ากับ 100 จุด และกริดในบริเวณเฟสของแข็ง (n_s) เท่ากับ 50 จุด

4.3 กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 10^{-6} เพื่อหยุดการคำนวณซ้ำของอัลกอริทึมที่สร้างขึ้น

เหตุผลที่เลือกค่าพิกัดเหล่านี้เนื่องจากเป็นค่าพิกัดที่ทำให้ค่าคำตอบที่ได้จากวิธีการที่นำเสนอมีความแม่นยำมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

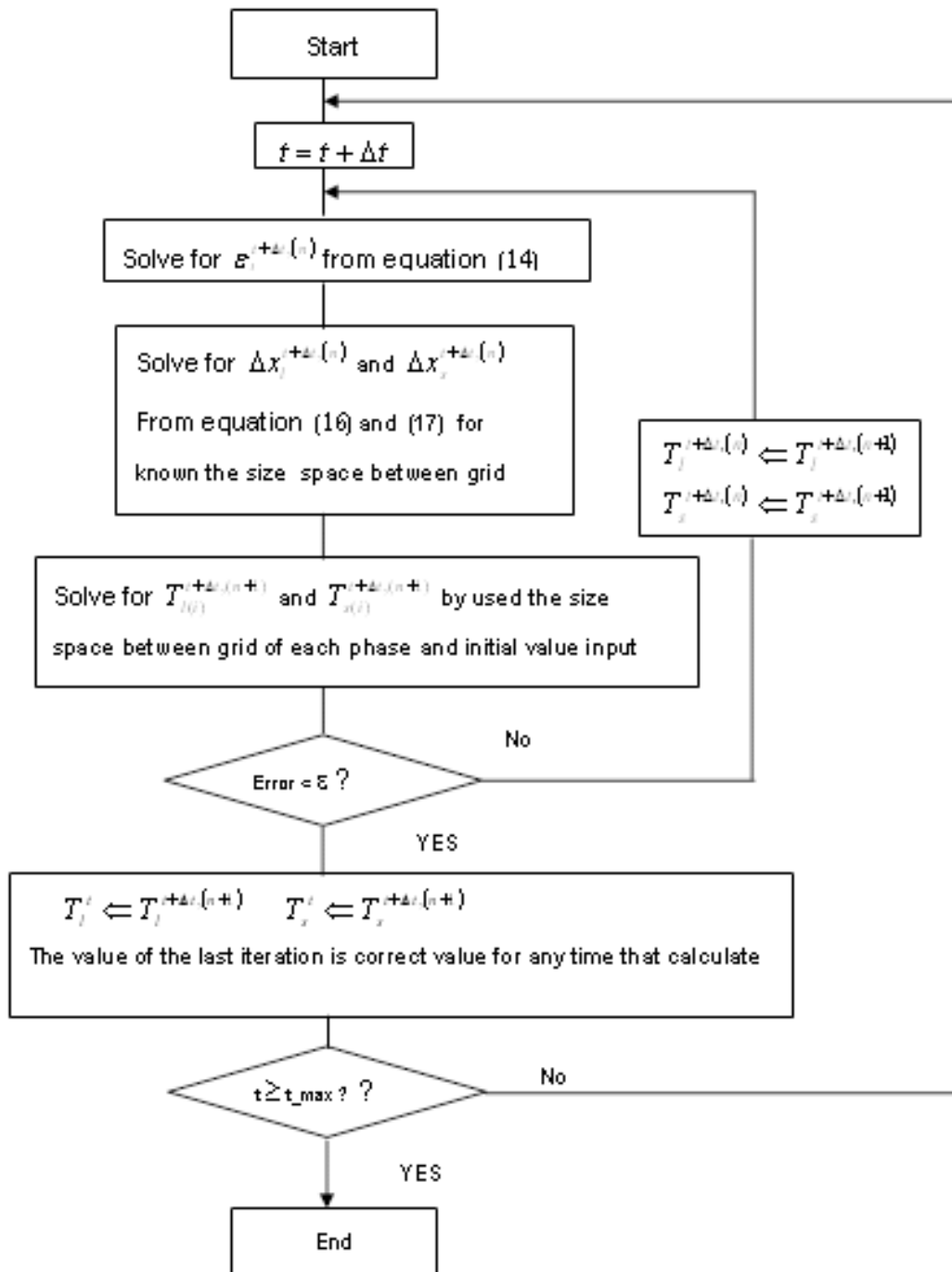


Figure 4. Flow chart for the algorithm

จาก Figure 4 จะอธิบายถึงลำดับขั้นตอน และรายละเอียดของแผนผังวิธีการคำนวณ สำหรับการแก้ปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสจากสมการที่ (13)-(18)

โดยที่ค่าคุณสมบัติต่างๆ นี้หาได้จากการหาค่าเฉลี่ยคุณสมบัติของ Porous Matrix และน้ำในแต่ละเฟส (Rattanadecho and Wongwises, 2007)

ผลที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และวิจารณ์

ผลคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำเสนอในกรณีที่พิจารณาวัสดุทดสอบเป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธี Similarly Transformation Method [1] โดยมีรูปแบบของสมการดังต่อไปนี้

จากสมการ

$$\mu = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\mu^2 \sigma^2}}{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \varepsilon)} - \frac{Sb \lambda^{1/2} e^{-\mu^2 \lambda}}{\operatorname{erfc}(\mu \cdot \lambda^{1/2})} \right\} \quad (18)$$

จะทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการสำหรับการหาค่าตำแหน่งของผิวละลายได้ดังนี้

$$\varepsilon = 2\mu(\alpha_i \cdot t)^{1/2} \quad (19)$$

และสมการการหาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณเฟสของเหลวและของแข็งดังนี้

$$T_i = \frac{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \eta_i)}{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \varepsilon)} \quad (20)$$

$$T_s = \frac{\operatorname{erfc}(\mu \lambda^{1/2} \eta_s)}{\operatorname{erfc}(\mu \lambda^{1/2})} \quad (21)$$

จากผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับวิธีการที่นำเสนอพบว่าอัตราการเคลื่อนตัวของผิวละลายของทั้งคู่มีค่าสอดคล้องกันดังแสดงใน Table 2 และ Figure 5 ซึ่งแสดงให้เห็นเป็นอย่างดีว่าวิธีการที่นำเสนอมีความแม่นยำและเชื่อถือได้

หลังจากที่ได้ทำการเปรียบเทียบให้เห็นถึงความสอดคล้องกันของทั้งสองวิธีซึ่งยืนยันให้เห็นถึงความถูกต้องของสมการและเทคนิควิธีที่นำเสนอแล้วนั้น หากทำการวิเคราะห์เพิ่มเติมโดยการกำหนดให้วัสดุทดสอบที่เราพิจารณาเป็นแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัว คำตอบที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับกลุ่มสมการ (13)-(18) โดยอยู่บนพื้นฐานของวัสดุพูนแบบอิมมิตัว ทำให้สามารถเห็นถึงความแตกต่างของลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวละลาย และอิทธิพลของระดับอุณหภูมิที่ใช้ในการทำละลายของกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และกรณีแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัวได้ดังนี้ เมื่อพิจารณาลักษณะกราฟถึงพฤติกรรมของการ

Table 1. Properties of porous pack bed (ice + porous)

| Properties | Unfrozen layer | Frozen layer |
|-------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| ρ kg / m ³ | 1942.0 | 1910.0 |
| α (m ² / s) | 0.21 x 10 ⁻⁶ | 0.605 x 10 ⁻⁶ |
| λ (W / m·K) | 0.855 | 1.480 |
| L (J / kg) | - | 167.5 x 10 ³ |

Table 2. The value of melting front from simulation method and exact solution method at several temperature load

| Time (s) | 40°C | 40°C (exact) | 70°C | 70°C (exact) | 100°C | 100°C (exact) |
|----------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|---------------|
| 180 | 0.0034900 | 0.0034231 | 0.0047200 | 0.0046231 | 0.0056100 | 0.0055323 |
| 360 | 0.0049300 | 0.0048723 | 0.0066600 | 0.0065723 | 0.0079300 | 0.0078606 |
| 540 | 0.0060300 | 0.0059945 | 0.0081600 | 0.0080715 | 0.0097100 | 0.0096411 |
| 720 | 0.0069600 | 0.0069237 | 0.0094200 | 0.0093409 | 0.0112100 | 0.0111615 |
| 900 | 0.0077800 | 0.0077785 | 0.0105300 | 0.0104822 | 0.0125300 | 0.0125114 |

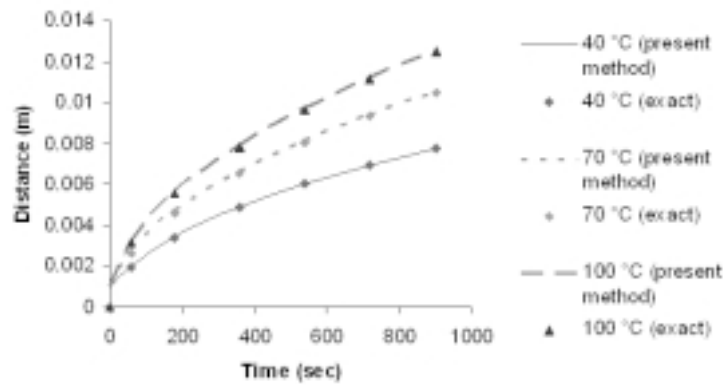


Figure 5. Compare between the melting front of presented method and exact solution method

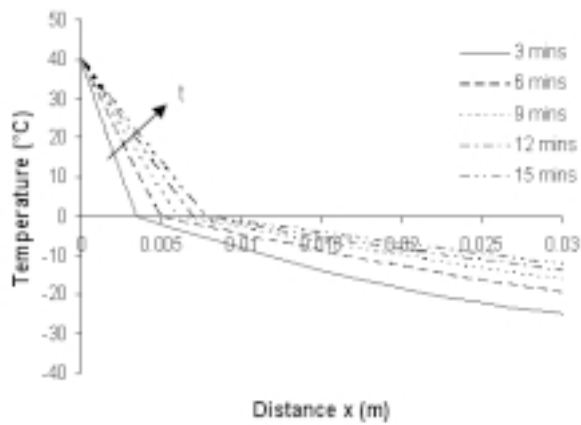


Figure 6. The simulations of temperature distribution of constant load at 40°C (pure ice)

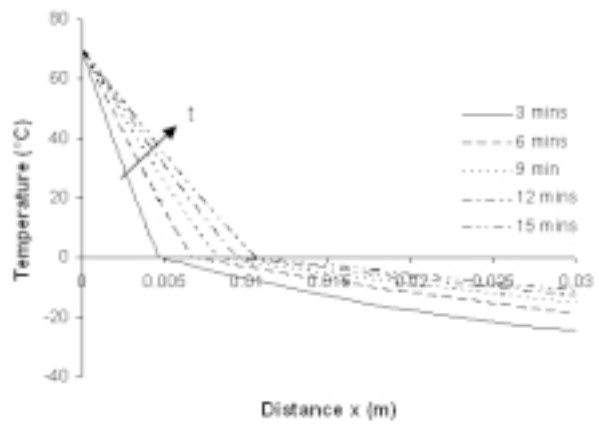


Figure 8. The simulations of temperature distribution of constant load at 70°C (pure ice)

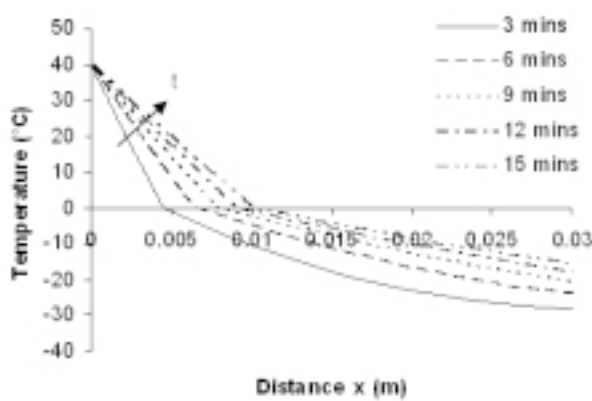


Figure 7. The simulations of temperature distribution of constant load at 40°C (ice+porous)

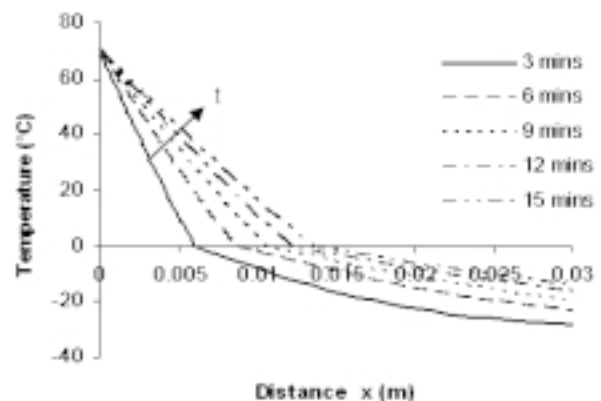


Figure 9. The simulations of temperature distribution of constant load at 70°C (ice+porous)

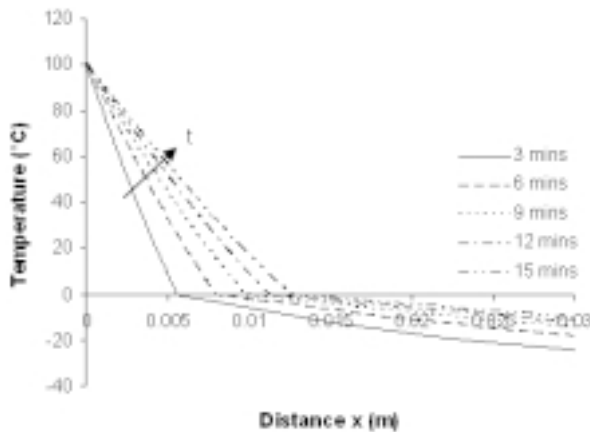


Figure 10. The simulations of temperature distribution of constant load at 100°C (pure ice)

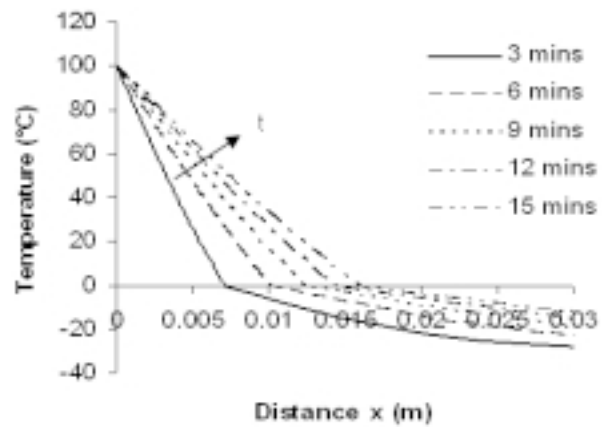


Figure 11. The simulations of temperature distribution of constant load at 100°C (ice+porous)

ละลายที่ได้จากผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำเสนอทั้งในกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และกรณีของแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัว จาก Figure 6, 7, 8, 9, 10 และ 11 จากนาฬิกาที่ 3 จนถึงนาฬิกาที่ 15 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 3 นาที พบว่าที่อุณหภูมิทำละลาย (T_f) ทั้ง 40°C 70°C และ 100°C ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่ถูกทำละลายจะมีค่าลดลงจากตำแหน่งเริ่มต้น (ซึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิทำละลาย) ไปจนถึงตำแหน่งของผิวละลาย ซึ่งที่จุดนี้จะมีอุณหภูมิกิ่งที่เท่ากับ 0°C หลังจากผ่านบริเวณนี้ไปจะเข้าสู่บริเวณที่ไม่ถูกทำละลาย ซึ่งแนวโน้มของอุณหภูมิจะค่อยๆ ลดลงจาก 0°C จากที่จุดผิวละลายไปจนกระทั่งถึงที่ตำแหน่งปลาย ($X = L$) แท่งน้ำแข็งจะมีค่าอุณหภูมิกิ่งที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามระยะความยาวในแกน x ของก้อน

น้ำแข็งเนื่องจากการหุ้มฉนวนไว้ที่ตำแหน่งปลาย ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$)

จาก Figure 5 จะสังเกตพบว่าเมื่อเพิ่มอุณหภูมิของการทำละลาย (T_f) จาก 40°C 70°C และ 100°C ผิวละลายจะเคลื่อนที่ได้เร็วขึ้นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนที่ส่งผ่านไปยังผิวละลายมากขึ้น นอกจากนั้นพบว่าที่อุณหภูมิของการทำละลายใดๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นระยะทางของผิวละลายจะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่จะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไปขณะหนึ่ง เพราะการที่บริเวณที่เกิดการละลายของน้ำแข็งเพิ่มขึ้นตามเวลานี้ซึ่งทำให้เกิดโซนของเหลว โซนของเหลวที่เกิดการ

ขยายตัวเพิ่มขึ้นนี้เปรียบเสมือนเป็นตัวต้านทานความร้อนที่ถูกส่งไปยังผิวน้ำแข็ง

นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบระหว่างกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์กับกรณีแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัวที่เวลาใดๆ นั้น จะพบว่าในกรณีที่แพคเกจของวัสดุพูนนั้นจะมีอัตราการละลายที่เร็วกว่าในกรณีที่เป็นน้ำแข็งธรรมดา เนื่องจากกรณีของแพคเกจของวัสดุพูนนั้นจะใช้ค่าความร้อนแฝงของการทำละลายน้อยกว่ากรณีของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ และแพคเกจของวัสดุพูนนั้นมีค่าความจุความร้อนที่ต่ำกว่าในกรณีของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ อีกทั้งการที่น้ำกระจายตัวอยู่ในช่องรูพูนต่างๆ ภายใน porous matrix นั้นจะเป็นการช่วยให้มีพื้นที่ในการรับพลังงานความร้อนมาใช้ในกระบวนการทำละลายเพิ่มขึ้นอีกด้วย

สรุป

หลังจากพิจารณาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของผิวละลาย พบว่า คำตอบที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีวิธีแปรผันระยะกริดที่นำเสนอในครั้งนี้นั้น มีความแม่นยำค่อนข้างสูงสำหรับปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสในระบบ 1 มิติ ซึ่งผลลัพธ์ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้จากปัญหาดังกล่าวนั้น พบว่า มีค่าสอดคล้องกับที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงในทุกกรณี

นอกจากนั้นจะพบว่าสำหรับการพิจารณาวัสดุให้เป็นแพคเบตของวัสดุพอรุน อัตราการละลายที่เกิดขึ้นในกรณีพิจารณาให้เป็นวัสดุพอรุนนั้น จะมีค่าสูงกว่าในกรณีที่พิจารณาเป็นน้ำแข็งเนื่องจากเหตุผลดังกล่าว

เมื่อพิจารณาถึงวิธีการนำเสนอที่ค่อนข้างสะดวกกว่าการหาผลเฉลยแบบแมนตรง โดยเฉพาะในกรณีที่เป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนและมีความไม่เชิงเส้น (Nonlinearity) สูงด้วยเหตุนี้ทำให้ปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสจึงเป็นปัญหาที่สามารถพัฒนาความรู้ความเข้าใจได้อีกมากโดยประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในรูปแบบใหม่ๆ เนื่องจากเป็นปัญหาที่สามารถต่อยอดความรู้ได้สูง อันเป็นผลมาจากพัฒนาการของระบบคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ที่สนับสนุนทุนวิจัยในครั้งนี้

รายการสัญลักษณ์

- ρ density, (kg/m³)
- α thermal diffusivity (m²/s)
- λ effective thermal conductivity, (W/mK)
- t time, (s)
- T temperature, (°C)
- x cartesian coordinates
- ε distance of moving front (m)
- \bar{X} position in coordinate x
- σ density of solid / density of liquid

$$\sigma = \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} \right)$$

η₁ It is term of $\frac{\bar{X}}{\epsilon} + \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} \right) - 1$

η_s It is term of $\frac{\bar{X}}{\epsilon}$

ε It is term of Δ-1

Sb subcooling number

$$Sb = \left(\frac{k_s}{k_l} \cdot \frac{T_0 - T_c}{T_h - T_0} \right)$$

erf error function

erfc complementary Error function
(erfc = 1 - erf)

Ste stefan number

$$Ste = \frac{\rho_1 \cdot c_1 (T_h - T_0)}{\rho_s \cdot h_s - h_1}$$

L latent heat [J/kg]

n the total of node that consider

i the number of node that consider

c specific heat

h enthalpy

ตัวห้อย

i initial

l unfrozen

s frozen

ตัวยก

n number of iterations

เอกสารอ้างอิง

Carlsaw, H.S. and Jaeger J.C. 1959. Conduction of Heat in Solid. 2nd Ed., p. 283,353. Oxford University Press, London and New York.

Crank, J. 1974. Numerical Methods in Heat Transfer, Chap. 9, John Wiley & Sons Ltd, 1981. Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion. Proc. Univ. Oxford, March p.25-27.

Goodman, T.R. 1961. J. Heat Transfer. Trans. ASME (C), 83-86.

Mastanaiah, K. 1976. On the Numerical Solution of Phase Change Problems Transient non-linear Heat Conduction, International Journal for Numerical Method in Engineering, vol. 10., 833-844.

Muehlbauer, J.C. and Sunderland, J.E. 1965. Heat Conduction with a Freezing or Melting. Appl. Mech. Rev. p.18 ,951.

- Murray, W., Landis, F. 1959. Numerical and Machine Solution of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing. Trans. ASME, 106-112.
- Rattanadecho, P. and Wongwises, S. 2007. Simulation of Freezing of Water-Saturated Porous Media in a Rectangular Cavity under Multiple Heat Sources with Different Temperature Using a Combined Transfinite Interpolation and PDE Methods. Computers & Chemical Engineering. Vol. 31, 2007, pp. 318-333.
- Rubinstein, L.I. 1971. The Stefan Problem. Am. Math. Soc. Transl. Math. Monogr. 27.
- Taylor, A.B. 1974. The Mathematical Formulation of Stefan Problems. Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion. Proc. Univ. Oxford, March p. 25-27