นิพนธ์ต้นฉบับ

รูปทรงและการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี

ณรงค์เดช สายพรชัย[1] และ กมล บุษบา[2]

Abstract

Saipornchai, N. and Budsaba, K.

Shape and distribution of Jones and Faddy's skew t random variable

Songklanakarin J. Sci. Technol., 2005, 27(5) : 1123-1134

The purpose of this research is to find another way to generate Jones and Faddy's skew t random variable and to construct quantile table, coefficient of skewness, coefficient of kurtosis and coefficient of variation tables of Jones and Faddy's skew t distribution. Graphs of its probability density function and graphs of its distribution function are also presented. The results of this study show that Jones and Faddy's skew t random variable can be generated from a beta random variable on (-1,1). The coefficients of skewness and kurtosis of the distribution depend on parameters a and b. The coefficient of variation of Jones and Faddy's skew t distribution can be calculated.

Key words : coefficient of skewness, coefficient of kurtosis, coefficient of variation

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathum Thani, 12121 Thailand.

[1]วท.ม.(สถิติประยุกต์), รองศาสตราจารย์ [2]Ph.D.(Statistics), ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12121

Corresponding e-mail: kamon@mathstat.sci.tu.ac.th

รับต้นฉบับ 19 พฤศจิกายน 2547 รับลงพิมพ์ 22 กุมภาพันธ์ 2548

บทคัดย่อ

ณรงค์เดช สายพรชัย และ กมล บุษบา
รูปทรงและการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี
ว. สงขลานครินทร์ วทท. 2548 27(5) : 1123-1134

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี สร้างตารางควอนไทล์ ตารางสัมประสิทธิ์ความเบ้ สัมประสิทธิ์ความโด่ง และสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี รวมทั้งนำเสนอกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและกราฟฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี ผลการศึกษาพบว่าการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีสามารถสร้างจากตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (-1,1) ได้ การวัดสัมประสิทธิ์ความเบ้และการวัดสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงทีแบบเบ้จะขึ้นกับค่าพารามิเตอร์ *a* และ *b* และพบว่าสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีได้

การแจกแจงทีของสติวเดนท์ (Student's t distribution) มักถูกใช้ในการอนุมานทางสถิติ เช่น การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานอยู่เสมอ โดยมีข้อสมมติเบื้องต้นที่สำคัญคือ ประชากรที่สนใจศึกษาต้องมีการแจกแจงแบบปกติหรือใกล้เคียงปกติ แต่ในการวิเคราะห์ทางสถิติหลายกรณีจะพบว่าข้อมูลที่ใช้ไม่เป็นไปตามข้อสมมติเบื้องต้น เช่น มีการแจกแจงที่มีความเบ้อันเนื่องมาจากมีข้อมูลที่มีค่าผิดปกติ เป็นต้น ดังนั้นจึงได้มีผู้เสนอการแจกแจงทีแบบเบ้ขึ้นมา ซึ่งรูปแบบการแจกแจงทีแบบเบ้ที่ได้รับความสนใจในปัจจุบัน ได้แก่ การแจกแจงทีแบบเบ้ที่เสนอโดยโจนส์-แฟดดี (Jones and Faddy, 2003) ซึ่งเป็นรูปแบบการแจกแจงทีแบบเบ้ใหม่ นิยามโดย

ให้ T เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี โดยมีค่าพารามิเตอร์ $a > 0$ และ $b > 0$ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม T กำหนดโดย

$$f(t;a,b) = C_{a,b}\left\{1+\frac{t}{(a+b+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{a+\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{t}{(a+b+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{b+\frac{1}{2}}$$

โดย $C_{a,b}$ คือ ค่าคงตัวที่ทำให้เป็นบรรทัดฐาน กำหนดโดย

$$C_{a,b} = \frac{1}{2^{a+b-1}B(a,b)\sqrt{a+b}} \qquad a>0,\ b>0$$

เมื่อ $B(\ ,\ )$ คือ ฟังก์ชันบีตา โจนส์-แฟดดี (Jones and Faddy, 2003) ได้แสดงว่าสามารถสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทีแบบเบ้ได้หลายวิธีดังนี้

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (0,1) ที่มีพารามิเตอร์ a,b ตัวแปรสุ่ม U และ V เป็นตัวแปรสุ่มไคสแควร์ 2 ตัว ที่เป็นอิสระกันที่มีองศาเสรี $2a$ และ $2b$ ตามลำดับ และ F เป็นตัวแปรสุ่มเอฟที่มีองศาเสรี 2a และ 2b แล้ว จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม

$$T = \frac{\sqrt{a+b}(2X-1)}{2\sqrt{X(1-X)}} = \frac{\sqrt{a+b}}{2}\frac{(U-V)}{\sqrt{UV}} = \frac{\sqrt{a+b}}{2}\left[\sqrt{\frac{aF}{b}}-\sqrt{\frac{b}{aF}}\right]$$

มีการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี ที่มีพารามิเตอร์ a,b และเมื่อค่าพารามิเตอร์ $a = b = v$ การแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีจะลดรูปเป็นการแจกแจงทีของสติวเดนท์ที่มีองศาเสรี $2v$ นั่นคือสามารถสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทีของสติวเดนท์ที่มีองศาเสรี $2v$ ได้ดังนี้

$$T=\frac{\sqrt{2v}(2X-1)}{2\sqrt{X(1-X)}}=\frac{\sqrt{2v}Y}{\sqrt{1-Y^2}}=\frac{\sqrt{2v}}{2}\frac{U-V}{\sqrt{UV}}=\sqrt{\frac{v}{2}}\left[\sqrt{F}-\frac{1}{\sqrt{F}}\right]$$

ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนี้กำหนดโดย

$$F(t;a,b)=I_{\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{a+b+t^2}}\right\}}(a,b) \qquad a>0,\ b>0$$

เมื่อ $I_x(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ คือ อัตราส่วนฟังก์ชันบีตาไม่สมบูรณ์ตามนิยามของอะบราโมวิทซ์และสตีกัน (Abramowitz and Stegun, 1965) ตัวแปรสุ่มทีแบบบัของโจนส์-แฟดดี มีฐานนิยมคือ $t=\frac{\sqrt{a+b}(a-b)}{\sqrt{2a+1}\sqrt{2b+1}}$ และมีโมเมนต์อันดับที่ r รอบจุดกำเนิดของการแจกแจงคือ

$$E\left[T^r\right]=\frac{(a+b)^{\frac{r}{2}}}{B(a,b)}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i 2^{-i} B\left(a+\frac{r}{2}-i,b-\frac{r}{2}\right) \qquad a>\frac{r}{2},b>\frac{r}{2}$$

$$E\left[T^r\right]=\frac{(a+b)^{\frac{r}{2}}}{2^r B(a,b)}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i B\left(a+\frac{r}{2}-i,b-\frac{r}{2}+i\right) \qquad a>\frac{r}{2},b>\frac{r}{2}$$

เนื่องจากการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีมีรูปแบบที่ไม่สมมาตรโดยทั่วไป ดังนั้นจึงสมควรศึกษาพารามิเตอร์รูปทรง (shape parameters) ที่แสดงความเบ้และความโด่งของการแจกแจง คำนวณสัมประสิทธิ์ที่ใช้วัดความเบ้ ความโด่ง พร้อมทั้งศึกษาลักษณะของการแจกแจง เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ต่อไป ดังนั้น วัตถุประสงค์ของการวิจัยนี้จึงเพื่อศึกษาวิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม การสร้างตารางควอนไทล์ ตารางสัมประสิทธิ์ความเบ้ สัมประสิทธิ์ความโด่ง และสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี รวมทั้งนำเสนอกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและกราฟฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี อนึ่งสำหรับการวัดความเบ้ของการแจกแจงจะใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยวิธีโมเมนต์

วิธีการวิจัย

1. หาสมบัติของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี เชิงทฤษฎีโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์และแคลคูลัส
2. สร้างตารางควอนไทล์ของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี โดยใช้โปรแกรมเมเปิล (Monagan, M.B, *et al*., 2002) หาค่าควอนไทล์ของการแจกแจงที่ระดับ 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99 และ 0.995
3. สร้างตารางสัมประสิทธิ์ความเบ้ของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี โดยให้ค่าพารามิเตอร์ a มีค่าตั้งแต่ 2, 3, ..., 20 และค่าพารามิเตอร์ b มีค่าตั้งแต่ 2, 3, ..., 20
4. สร้างตารางสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี โดยให้ค่าพารามิเตอร์ a มีค่าตั้งแต่ 3, 4, 5, ..., 20 และค่าพารามิเตอร์ b มีค่าตั้งแต่ 3, 4, 5, ..., 20
5. สร้างตารางสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี โดยให้ค่าพารามิเตอร์ a มีค่าตั้งแต่ 2, 3, 4, ..., 20 และค่าพารามิเตอร์ b มีค่าตั้งแต่ 2, 3, 4, ..., 20 โดยพิจารณากรณี $a > b$ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันจะมีค่าบวก

6. สร้างกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี 2 กรณี คือ

(1) กรณีที่ 1 กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี จำนวน 5 รูป โดยค่าพารามิเตอร์ a และ b มีความสัมพันธ์ในรูป $a = 2^i b$, $b = 3$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, ..., 4$

(2) กรณีที่ 2 กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี จำนวน 5 รูป โดยค่าพารามิเตอร์ a และ b มีความสัมพันธ์ในรูป $b = 2^i a$, $a = 3$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, ..., 4$

ผลการวิจัย

จากการศึกษาวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี การสร้างตารางควอนไทล์ ตารางสัมประสิทธิ์ความเบ้ สัมประสิทธิ์ความโด่ง และสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี รวมทั้งการสร้างกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและกราฟฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี พบว่า

1. สามารถสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี ได้จากการแจกแจงแบบบีตาบนช่วง (-1,1) ได้ กล่าวคือ ถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (-1,1) ที่มีพารามิเตอร์ a,b จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม $T = \frac{\sqrt{a+b}Y}{\sqrt{1-Y^2}}$ จะมีการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี ที่มีพารามิเตอร์ a,b

พิสูจน์ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (0,1) ที่มีพารามิเตอร์ a,b ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ $f_x(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}$ โดยที่ $0 \le x \le 1$ ถ้ากำหนดให้ $Y = 2X\text{-}1$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y คือ

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)2^{a+b-1}}(1+y)^{a-1}(1-y)^{b-1}, & -1 \le y \le 1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

หรือ $Y = 2X\text{-}1$ คือตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (-1,1) ที่มีพารามิเตอร์ a,b และจากความสัมพันธ์ $X = \frac{Y+1}{2}$ ดังนั้นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี $T = \frac{\sqrt{a+b}(2X-1)}{2\sqrt{X(1-X)}}$ สามารถเขียนในรูปของตัวแปรสุ่ม Y ดังนี้

$$T = \frac{\sqrt{a+b}\left(2\left(\frac{Y+1}{2}\right)-1\right)}{2\sqrt{\left(\frac{Y+1}{2}\right)\left(1-\frac{Y+1}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{a+b}Y}{2\sqrt{\left(\frac{Y+1}{2}\right)\left(\frac{1-Y}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{a+b}Y}{2\sqrt{\frac{1-Y^2}{4}}} = \frac{\sqrt{a+b}Y}{\sqrt{1-Y^2}}$$

2. สัมประสิทธิ์ความเบ้โดยวิธีโมเมนต์ คือ $\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ โดยที่

$$\mu_3 = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(a-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(b-\frac{3}{2}\right)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)(a-3b+5)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{3}{2}\right)(3a-b-5)\right]}{8\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$-\frac{3}{8}\frac{(a-b)(a+b)^{\frac{3}{2}}\Gamma(a-\frac{1}{2})\Gamma(b-\frac{1}{2})\left[(a-b)^2+a-2+b\right]}{\Gamma(a)\Gamma(b)(a-1)(b-1)}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(a-b)^3(a+b)^{\frac{3}{2}}\Gamma^3(a-\frac{1}{2})\Gamma^3(b-\frac{1}{2})}{\Gamma^3(a)\Gamma^3(b)} \qquad a>\frac{3}{2}, b>\frac{3}{2}$$

$$\sigma^3=(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{(a+b)((a-b)^2+a-2+b)}{4(a-1)(b-1)}-\frac{1}{4}\frac{(a-b)^2(a+b)\Gamma(a-0.5)^2\Gamma(b-0.5)^2}{\Gamma(a)^2\Gamma(b)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3. สัมประสิทธิ์ความโด่ง คือ $\beta_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ โดยที่

$$\mu_4=\frac{(a+b)^2\left(\frac{a(a+1)}{(b-1)(b-2)}-\frac{4a}{b-1}+6-\frac{4b}{a-1}+\frac{b(b+1)}{(a-1)(a-2)}\right)}{16}$$

$$-\frac{(a-b)(a+b)^2\Gamma(a-\frac{1}{2})\Gamma(b-\frac{1}{2})\Gamma(a-\frac{3}{2})\Gamma(b-\frac{3}{2})}{4\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}$$

$$\times\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{3}{2}\right)(a-3b+5)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{3}{2}\right)(3a-b-5)\right]$$

$$+\frac{3(a-b)^2(a+b)^2\Gamma^2(a-\frac{1}{2})\Gamma^2(b-\frac{1}{2})\left\{(a-b)^2+a+b-2\right\}}{8\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)(a-1)(b-1)}$$

$$-\frac{3(a-b)^4(a+b)^2\Gamma^4(a-\frac{1}{2})\Gamma^4(b-\frac{1}{2})}{16\Gamma^4(a)\Gamma^4(b)} \qquad a>2, b>2$$

$$\sigma^4=(\sigma^2)^2=\left(\frac{(a+b)\left\{(a-b)^2+a+b-2\right\}}{4(a-1)(b-1)}-\frac{1(a-b)^2(a+b)\Gamma^2(a-\frac{1}{2})\Gamma^2(b-\frac{1}{2})}{4\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\right)^2$$

4. สัมประสิทธิ์การแปรผัน

เนื่องจาก $CV=\frac{\sigma}{\mu}$ โดยที่

$$\mu=\frac{(a-b)\sqrt{a+b}\,\Gamma(a-0.5)\Gamma(b-0.5)}{2\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(a+b)}{4}\left(\frac{\left\{(a-b)^2+a+b-2\right\}}{(a-1)(b-1)}-\frac{(a-b)^2\Gamma^2(a-0.5)\Gamma^2(b-0.5)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\right)}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี คือ

$$CV=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)(a-b)}\sqrt{\frac{\left\{(a-b)^2+a+b-2\right\}}{(a-1)(b-1)}-\frac{(a-b)^2\Gamma^2\left(a-\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}}$$

โดย $a>1, b>1$ พิจารณาเฉพาะ $a>b$ เพื่อทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็นบวก

5. กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

Figure 1 แสดงกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี เมื่อค่าพารามิเตอร์ a = 3, 6, 12, 24, 48 และ b = 3 ส่วน Figure 2 แสดงกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเมื่อค่าพารามิเตอร์ b = 3, 6, 12, 24, 48 และ a = 3 ในกรณีที่ a = 3 (Figure 1) หรือ b = 3 (Figure 2) ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทีของสติวเดนท์ที่มีองศาเสรีเท่ากับ 6 ซึ่งการแจกแจงจะมีลักษณะสมมาตร

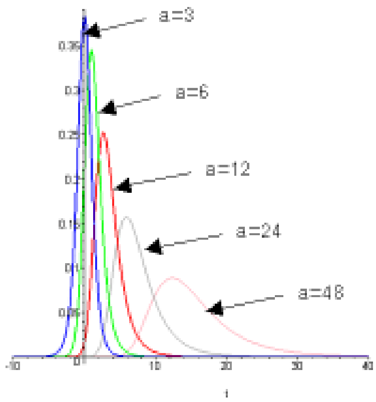

Figure 1. Probability density function of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters *a* = 3, 6, 12, 24, 48 and *b* = 3.

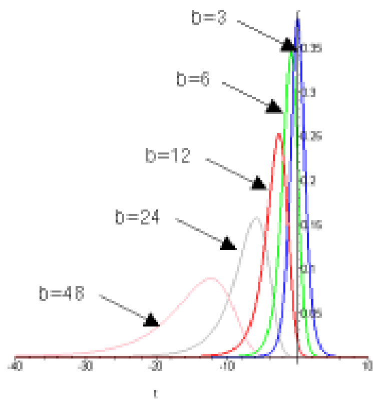

Figure 2. Probability density function of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters *b* = 3, 6, 12, 24, 48 and *a* = 3.

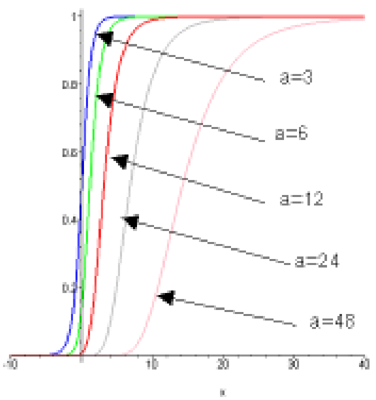

Figure 3. Distribution function of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters *a* = 3, 6, 12, 24, 48 and *b* = 3.

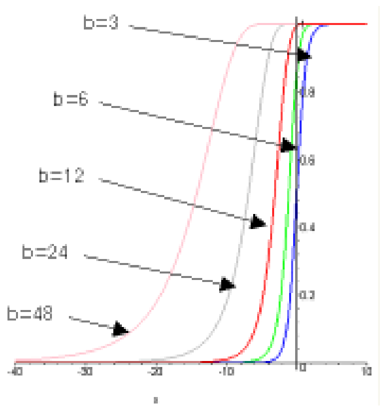

Figure 4. Distribution function of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters *b* = 3, 6, 12, 24, 48 and *a* = 3.

6. กราฟฟังก์ชันการแจกแจง

Figure 3 แสดงกราฟฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดี เมื่อค่าพารามิเตอร์ a = 3, 6, 12, 24, 48 และ b = 3 ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นใน Figure 1 ส่วน Figure 4 แสดงกราฟฟังก์ชันการแจกแจงเมื่อค่าพารามิเตอร์ b = 3, 6, 12, 24, 48 และ a = 3 ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นใน Figure 2 ในกรณีที่ $a = 3$ (Figure 3) หรือ $b = 3$ (Figure 4) ฟังก์ชันการแจกแจงคือฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทีของสติวเดนท์ที่มีองศาเสรีเท่ากับ 6 ซึ่งจะเห็นว่าความน่าจะเป็นสะสมคือ 0.5 เมื่อค่าของตัวแปรสุ่มเท่ากับศูนย์

7. ตารางการแจกแจง

ตารางการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีประกอบไปด้วย ตารางควอนไทล์ของการแจกแจง (Table 1) ซึ่งใช้สำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ ตารางแสดงค่าสถิติทีที่สอดคล้องกับความน่าจะเป็นสะสมที่ต้องการ เมื่อค่าพารามิเตอร์ b มีค่าต่างๆ (โดยที่ค่าพารามิเตอร์ a = 5) ให้สังเกตว่าตารางควอนไทล์ในกรณีของการแจกแจงแบบเบ้ต้องแสดงค่าควอนไทล์ทั้งควอนไทล์ที่มีค่าบวกและควอนไทล์ที่มีค่าลบเนื่องจากความไม่สมมาตรของการแจกแจง ตัวอย่างเช่น เมื่อ b = 10 ค่า $P(T < t_{0.05}) = P(T < -3.7391)$ แต่ค่า $P(T < t_{0.95}) = P(T < 0.3109)$ แต่ถ้าให้ $b = a = 5$ จะได้ค่าควอนไทล์ที่สอดคล้องกับการแจกแจงทีของสติวเดนท์ กล่าวคือ มีค่าควอนไทล์เท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือค่า $P(T < t_{0.05}) = P(T < -1.8125)$ และค่า $P(T < t_{0.95}) = P(T < 1.8125)$

Table 2 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของการแจกแจง ให้สังเกตว่าเมื่อพารามิเตอร์ a และ b มีค่าเท่ากัน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้คือศูนย์ หรือคือการแจกแจงแบบทีของสติวเดนท์ที่มีลักษณะสมมาตร ในกรณีที่ $a > b$ หรือตัวเลขในบริเวณด้านล่างซ้ายของตาราง ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้มีค่าเป็นบวก ส่วนในกรณีที่ $a < b$ หรือตัวเลขในบริเวณด้านบนขวาของตาราง ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้มีค่าเป็นลบ นั่นคือ ถ้า $a > b$ การแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา แต่ถ้า $a < b$ การแจกแจงมีลักษณะเบ้ซ้าย นอกจากนี้ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เมื่อ $a = \alpha$ และ $b = \gamma$ จะมีขนาดความเบ้เท่ากับเมื่อ $a = \gamma$ และ $b = \alpha$ แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม เช่น ถ้าให้ $a = 3$ และ $b = 4$ จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้คือ -0.5822 แต่ถ้าให้ $a = 4$ และ $b = 3$ จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้คือ 0.5822 อนึ่งลักษณะของความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นเช่นเดียวกันกับค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งใน Table 3 ด้วย แต่ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเมื่อ $a = \alpha$ และ $b = \gamma$ จะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเมื่อค่าพารามิเตอร์ $a = \gamma$ และ $b = \alpha$ โดยจะมีเครื่องหมายเดียวกัน เช่น ถ้าให้ $a = 10$ และ $b = 8$ จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งคือ 3.4894 ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเมื่อ $a = 8$ และ $b = 10$

ตารางสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงแสดงใน Table 4 ใช้สำหรับการเปรียบเทียบการกระจายของการแจกแจง โดยค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันนี้มีข้อจำกัดคือ $a > 1$ และ $b > 1$ เนื่องจากสมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่พิจารณาเฉพาะค่าพารามิเตอร์ $a > b$ เพื่อทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าบวก ซึ่งจะเห็นว่าถ้าพารามิเตอร์ a เพิ่มขึ้นขณะที่ b มีค่าคงที่ ค่าการกระจายของการแจกแจงจะน้อยลง เช่น ถ้า a = 10 และให้ b = 11, 12, 13 และ 14 ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันจะมีค่าเป็น 4.4814, 2.3045, 1.5809, และ 1.2204 ตามลำดับ อนึ่งในกรณี $a = b$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันไม่นิยามซึ่งสอดคล้องกับการแจกแจงทีของสติวเดนท์ เนื่องจากค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีมีพารามิเตอร์สองตัวคือ $a > 0$ และ $b > 0$ โดยพารามิเตอร์ทั้งสองเป็นพารามิเตอร์รูปทรง เมื่อ $a = b$ การแจกแจงคือการแจกแจงทีของสติวเดนท์ที่มีองศาเสรี $2a$ หรือการแจกแจงแบบสมมาตร ถ้า $a > b$ การแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา แต่ถ้า $a < b$ การแจกแจงมีลักษณะเบ้ซ้าย ตัวแปรสุ่มทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีสามารถสร้างได้จากตัวแปรสุ่มบีตาบนช่วง (-1,1) ที่มีพารามิเตอร์ a,b ได้

การวัดความเบ้โดยวิธีโมเมนต์ของการแจกแจงทีแบบเบ้ของโจนส์-แฟดดีมีข้อจำกัดในการหาค่าสัมประสิทธิ์

Table 1. Jones and Faddy's skew t distribution with parameter a = 5 and b = 1 to 20. Entry is t_α where $P[T < t_\alpha] = \alpha$

b	$t_{0.05}$	$t_{0.1}$	$t_{0.15}$	$t_{0.2}$	$t_{0.25}$	$t_{0.3}$	$t_{0.35}$	$t_{0.4}$	$t_{0.45}$	$t_{0.5}$	$t_{0.55}$
1	0.2406	0.6648	0.9710	1.2328	1.4744	1.7082	1.9418	2.1817	2.4336	2.7038	3.0001
2	-0.4388	-0.0546	0.2054	0.4154	0.5997	0.7695	0.9317	1.0906	1.2500	1.4130	1.5832
3	-0.9470	-0.5544	-0.2973	-0.0948	0.0787	0.2353	0.3816	0.5222	0.6603	0.7987	0.9401
4	-1.3944	-0.9808	-0.7150	-0.5091	-0.3350	-0.1799	-0.0367	0.0992	0.2311	0.3617	0.4933
5	-1.8125	-1.3722	-1.0931	-0.8791	-0.6998	-0.5715	-0.3966	-0.2602	-0.1289	0.0000	0.1289
6	-2.2135	-1.7438	-1.4488	-1.2245	-1.0378	-0.8741	-0.7250	-0.5856	-0.4520	-0.3219	-0.1925
7	-2.6038	-2.1030	-1.7908	-1.5548	-1.3594	-1.1889	-1.0343	-0.8904	-0.7533	-0.6201	-0.4885
8	-2.9869	-2.4539	-2.1236	-1.8750	-1.6701	-1.4919	-1.3310	-1.1818	-1.0401	-0.9030	-0.7679
9	-3.3650	-2.7989	-2.4499	-2.1882	-1.9732	-1.7868	-1.6191	-1.4639	-1.3170	-1.1753	-1.0360
10	-3.7391	-3.1397	-2.7715	-2.4963	-2.2709	-2.0759	-1.9009	-1.7393	-1.5868	-1.4400	-1.2961
11	-4.1105	-3.4772	-3.0895	-2.8005	-2.5643	-2.3605	-2.1779	-2.0097	-1.8531	-1.6991	-1.5502
12	-4.4796	-3.8122	-3.4048	-3.1018	-2.8546	-2.6417	-2.4514	-2.2763	-2.1117	-1.9538	-1.7998
13	-4.8470	-4.1452	-3.7179	-3.4007	-3.1424	-2.9203	-2.7220	-2.5399	-2.3689	-2.2052	-2.0457
14	-5.2129	-4.4766	-4.0293	-3.6977	-3.4282	-3.1967	-2.9903	-2.8011	-2.6236	-2.4540	-2.2889
15	-5.5777	-4.8067	-4.3392	-3.9932	-3.7123	-3.4714	-3.2568	-3.0603	-2.8763	-2.7005	-2.5296
16	-5.9415	-5.1357	-4.6479	-4.2847	-3.9951	-3.7446	-3.5218	-3.3179	-3.1272	-2.9452	-2.7685
17	-6.3045	-5.4639	-4.9557	-4.5806	-4.2768	-4.0168	-3.7855	-3.5743	-3.3767	-3.1885	-3.0059
18	-6.6668	-5.7912	-5.2626	-4.8729	-4.5575	-4.2877	-4.0482	-3.8294	-3.6251	-3.4305	-3.2419
19	-7.0285	-6.1179	-5.5688	-5.1644	-4.8373	-4.5579	-4.3099	-4.0836	-3.8727	-3.6714	-3.4768
20	-7.3897	-6.4440	-5.8744	-5.4552	-5.1165	-4.8273	-4.5709	-4.3370	-4.1189	-3.9114	-3.7107

Table 1.(Continued)

b	$t_{0.6}$	$t_{0.65}$	$t_{0.7}$	$t_{0.75}$	$t_{0.8}$	$t_{0.85}$	$t_{0.9}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	3.3326	3.7156	4.1710	4.7346	5.4713	6.5155	8.2139	11.9367	17.1024	27.2488	38.6329
2	1.7644	1.9619	2.1828	2.4382	2.7469	3.1451	3.7186	4.7656	5.9390	7.7580	9.3948
3	1.0873	1.2439	1.4146	1.6064	1.8306	2.1088	2.4897	3.1351	3.7979	4.7328	5.5031
4	0.6287	0.7706	0.9229	1.0912	1.2843	1.5183	1.8296	2.3349	2.8283	3.4874	4.0037
5	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
6	-0.0616	0.0735	0.2160	0.3704	0.5436	0.7480	1.0109	1.4172	1.7914	2.2613	2.6083
7	-0.3558	-0.2197	-0.0769	0.0767	0.2479	0.4483	0.7032	1.0909	1.4415	1.8729	2.1856
8	-0.6324	-0.4938	-0.3492	-0.1943	-0.0220	0.1768	0.4285	0.8064	1.1432	1.5511	1.8424
9	-0.8968	-0.7550	-0.6075	-0.4501	-0.2766	-0.0759	0.1755	0.5493	0.8783	1.2717	1.5492
10	-1.1527	-1.0690	-0.8558	-0.6951	-0.5186	-0.3154	-0.0622	0.3109	0.6361	1.0208	1.2895
11	-1.4021	-1.2520	-1.0968	-0.9321	-0.7519	-0.5452	-0.2890	0.0860	0.4102	0.7901	1.0532
12	-1.6467	-1.4919	-1.3322	-1.1632	-0.9787	-0.7678	-0.5075	-0.1287	0.1962	0.5742	0.8340
13	-1.8875	-1.7278	-1.5632	-1.3896	-1.2004	-0.9848	-0.7196	-0.3358	-0.0085	0.3696	0.6277
14	-2.1253	-1.9650	-1.7909	-1.6123	-1.4182	-1.1974	-0.9267	-0.5368	-0.2062	0.1735	0.4314
15	-2.3606	-2.1950	-2.0158	-1.8321	-1.6327	-1.4064	-1.1299	-0.7331	-0.3982	-0.0156	0.2428
16	-2.5940	-2.4185	-2.2384	-2.0494	-1.8446	-1.6126	-1.3297	-0.9254	-0.5851	-0.1993	0.0606
17	-2.8257	-2.6446	-2.4592	-2.2697	-2.0543	-1.8164	-1.5269	-1.1145	-0.7694	-0.3785	-0.1166
18	-3.0559	-2.8693	-2.6784	-2.4783	-2.2621	-2.0182	-1.7219	-1.3010	-0.9500	-0.5539	-0.2895
19	-3.2850	-3.0928	-2.8962	-2.6905	-2.4685	-2.2183	-1.9150	-1.4853	-1.1280	-0.7262	-0.4589
20	-3.5131	-3.3151	-3.1129	-2.9014	-2.6735	-2.4169	-2.1064	-1.6676	-1.3038	-0.8959	-0.6254

Table 2. Coefficient of skewness of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters a = 2 to 20 and b = 2 to 11.

a	b									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.0000	-1.8553	-2.6189	-3.0796	-3.3927	-3.6204	-3.7938	-3.9304	-4.0408	-4.1319
3	1.8553	0.0000	-0.5822	-0.9122	-1.1331	-1.2937	-1.4164	-1.5136	-1.5927	-1.6583
4	2.6189	0.5822	0.0000	-0.3186	-0.5292	-0.6817	-0.7984	-0.8910	-0.9665	-1.0294
5	3.0796	0.9122	0.3186	0.0000	-0.2090	-0.3599	-0.4754	-0.5672	-0.6423	-0.7049
6	3.3927	1.1331	0.5292	0.2090	0.0000	-0.1507	-0.2661	-0.3579	-0.4331	-0.4959
7	3.6204	1.2937	0.6817	0.3599	0.1507	0.0000	-0.1154	-0.2073	-0.2827	-0.3458
8	3.7938	1.4164	0.7984	0.4754	0.2661	0.1154	0.0000	-0.0920	-0.1675	-0.2309
9	3.9304	1.5136	0.8910	0.5672	0.3579	0.2073	0.0920	0.0000	-0.0756	-0.1391
10	4.0408	1.5927	0.9665	0.6423	0.4331	0.2827	0.1675	0.0756	0.0000	-0.0636
11	4.1319	1.6583	1.0294	0.7049	0.4959	0.3458	0.2309	0.1391	0.0636	0.0000
12	4.2084	1.7136	1.0826	0.7581	0.5494	0.3996	0.2850	0.1934	0.1179	0.0544
13	4.2735	1.7610	1.1283	0.8039	0.5955	0.4461	0.3317	0.2403	0.1651	0.1016
14	4.3297	1.8020	1.1680	0.8437	0.6357	0.4867	0.3727	0.2815	0.2064	0.1431
15	4.3786	1.8379	1.2028	0.8787	0.6711	0.5225	0.4088	0.3179	0.2430	0.1798
16	4.4215	1.8695	1.2336	0.9097	0.7026	0.5544	0.4410	0.3504	0.2757	0.2127
17	4.4596	1.8976	1.2610	0.9374	0.7307	0.5829	0.4698	0.3795	0.3050	0.2422
18	4.4935	1.9228	1.2856	0.9623	0.7560	0.6086	0.4959	0.4058	0.3316	0.2689
19	4.5240	1.9454	1.3078	0.9847	0.7789	0.6319	0.5195	0.4297	0.3557	0.2932
20	4.5515	1.9659	1.3279	1.0052	0.7997	0.6531	0.5410	0.4516	0.3778	0.3155

Table 2.(Continued)

a	b								
	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	-4.2084	-4.2735	-4.3297	-4.3786	-4.4215	-4.4596	-4.4935	-4.5240	-4.5515
3	-1.7136	-1.7610	-1.8020	-1.8379	-1.8695	-1.8976	-1.9228	-1.9454	-1.9659
4	-1.0826	-1.1283	-1.1680	-1.2028	-1.2336	-1.2610	-1.2856	-1.3078	-1.3279
5	-0.7581	-0.8039	-0.8437	-0.8787	-0.9097	-0.9374	-0.9623	-0.9847	-1.0052
6	-0.5494	-0.5955	-0.6357	-0.6711	-0.7026	-0.7307	-0.7560	-0.7789	-0.7997
7	-0.3996	-0.4461	-0.4867	-0.5225	-0.5544	-0.5829	-0.6086	-0.6319	-0.6531
8	-0.2850	-0.3317	-0.3727	-0.4088	-0.4410	-0.4698	-0.4959	-0.5195	-0.5410
9	-0.1934	-0.2403	-0.2815	-0.3179	-0.3504	-0.3795	-0.4058	-0.4297	-0.4516
10	-0.1179	-0.1651	-0.2064	-0.2430	-0.2757	-0.3050	-0.3316	-0.3557	-0.3778
11	-0.0544	-0.1016	-0.1431	-0.1798	-0.2127	-0.2422	-0.2689	-0.2932	-0.3155
12	0.0000	-0.0473	-0.0888	-0.1256	-0.1586	-0.1882	-0.2151	-0.2396	-0.2620
13	0.0473	0.0000	-0.0416	-0.0785	-0.1115	-0.1412	-0.1682	-0.1928	-0.2153
14	0.0888	0.0416	0.0000	-0.0369	-0.0700	-0.0998	-0.1268	-0.1515	-0.1741
15	0.1256	0.0785	0.0369	0.0000	-0.0331	-0.0629	-0.0900	-0.1148	-0.1374
16	0.1586	0.1115	0.0700	0.0331	0.0000	-0.0299	-0.0570	-0.0818	-0.1045
17	0.1882	0.1412	0.0998	0.0629	0.0299	0.0000	-0.0271	-0.0519	-0.0747
18	0.2151	0.1682	0.1268	0.0900	0.0570	0.0271	0.0000	-0.0248	-0.0476
19	0.2396	0.1928	0.1515	0.1148	0.0818	0.0519	0.0248	0.0000	-0.0228
20	0.2620	0.2153	0.1741	0.1374	0.1045	0.0747	0.0476	0.0228	0.0000

Table 3. Coefficient of kurtosis of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters a = 3 to 20 and b = 3 to 11.

a	b								
	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
3	6.0000	6.1415	7.1080	8.0745	8.9340	9.6801	10.3257	10.8864	11.3762
4	6.1415	4.5000	4.4714	4.7228	5.0302	5.3345	5.6182	5.8771	6.1114
5	7.1080	4.4714	4.0000	3.9634	4.0586	4.1972	4.3472	4.4956	4.6371
6	8.0745	4.7228	3.9634	3.7500	3.7191	3.7612	3.8341	3.9193	4.0079
7	8.9340	5.0302	4.0586	3.7191	3.6000	3.5752	3.5950	3.6369	3.6894
8	9.6801	5.3345	4.1972	3.7612	3.5752	3.5000	3.4800	3.4894	3.5148
9	10.3257	5.6182	4.3472	3.8341	3.5950	3.4800	3.4286	3.4123	3.4163
10	10.8864	5.8771	4.4956	3.9193	3.6369	3.4894	3.4123	3.3750	3.3615
11	11.3762	6.1114	4.6371	4.0079	3.6894	3.5148	3.4163	3.3615	3.3333
12	11.8069	6.3231	4.7698	4.0957	3.7466	3.5490	3.4323	3.3627	3.3220
13	12.1881	6.5146	4.8931	4.1805	3.8051	3.5878	3.4555	3.3730	3.3216
14	12.5275	6.6882	5.0073	4.2613	3.8631	3.6287	3.4829	3.3892	3.3284
15	12.8314	6.8460	5.1130	4.3377	3.9196	3.6702	3.5124	3.4090	3.3399
16	13.1050	6.9899	5.2108	4.4096	3.9739	3.7114	3.5431	3.4310	3.3546
17	13.3525	7.1215	5.3014	4.4772	4.0259	3.7517	3.5741	3.4542	3.3713
18	13.5774	7.2423	5.3854	4.5407	4.0755	3.7907	3.6048	3.4780	3.3892
19	13.7827	7.3535	5.4635	4.6003	4.1225	3.8284	3.6350	3.5020	3.4079
20	13.9707	7.4561	5.5362	4.6563	4.1672	3.8646	3.6644	3.5258	3.4269

Table 3. (Continued)

a	b								
	12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
3	11.8069	12.1881	12.5275	12.8314	13.1050	13.3525	13.5774	13.7827	13.9707
4	6.3231	6.5146	6.6882	6.8460	6.9899	7.1215	7.2423	7.3535	7.4561
5	4.7698	4.8931	5.0073	5.1130	5.2108	5.3014	5.3854	5.4635	5.5362
6	4.0957	4.1805	4.2613	4.3377	4.4096	4.4772	4.5407	4.6003	4.6563
7	3.7466	3.8051	3.8631	3.9196	3.9739	4.0259	4.0755	4.1225	4.1672
8	3.5490	3.5878	3.6287	3.6702	3.7114	3.7517	3.7907	3.8284	3.8646
9	3.4323	3.4555	3.4829	3.5124	3.5431	3.5741	3.6048	3.6350	3.6644
10	3.3627	3.3730	3.3892	3.4090	3.4310	3.4542	3.4780	3.5020	3.5258
11	3.3220	3.3216	3.3284	3.3399	3.3546	3.3713	3.3892	3.4079	3.4269
12	3.3000	3.2904	3.2891	3.2935	3.3019	3.3129	3.3258	3.3399	3.3548
13	3.2904	3.2727	3.2644	3.2627	3.2655	3.2717	3.2801	3.2902	3.3015
14	3.2891	3.2644	3.2500	3.2428	3.2408	3.2426	3.2471	3.2537	3.2617
15	3.2935	3.2627	3.2428	3.2308	3.2244	3.2224	3.2234	3.2268	3.2319
16	3.3019	3.2655	3.2408	3.2245	3.2143	3.2087	3.2066	3.2071	3.2096
17	3.3129	3.2717	3.2426	3.2224	3.2087	3.2000	3.1950	3.1930	3.1931
18	3.3258	3.2801	3.2471	3.2234	3.2066	3.1950	3.1875	3.1831	3.1810
19	3.3399	3.2902	3.2537	3.2268	3.2071	3.1930	3.1831	3.1765	3.1725
20	3.3548	3.3015	3.2617	3.2319	3.2096	3.1931	3.1810	3.1725	3.1667

Table 4. Coefficient of variation of Jones and Faddy's skew t distribution with parameters a = 2 to 20 and b = 2 to 20.

a	b = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	-																		
3	2.1827	-																	
4	1.3292	2.5255	-																
5	1.0526	1.4182	2.8725	-															
6	0.9167	1.0559	1.5577	3.1919	-														
7	0.8361	0.8774	1.1249	1.6981	3.4857	-													
8	0.7828	0.7714	0.9109	1.2046	1.8323	3.7583	-												
9	0.7449	0.7014	0.7837	0.9600	1.2849	J˚8àq6	4.0134	-											
10	0.7167	0.6518	0.6996	0.8144	1.0131	1.3632	2.0803	4.2537	-										
11	0.6948	0.6148	0.6400	0.7181	0.8511	1.0667	1.4386	2.1950	4.4814	-									
12	0.6773	0.5862	0.5955	0.6497	0.7438	0.8897	1.1193	1.5111	2.3045	4.6984	-								
13	0.6631	0.5634	0.5611	0.5987	0.6676	0.7724	0.9286	1.1706	1.5809	2.4093	4.9059	-							
14	0.6513	0.5448	0.5337	0.5592	0.6107	0.6891	0.8021	0.9670	1.2204	1.6481	2.5099	5.1051	-						
15	0.6413	0.5293	0.5113	0.5278	0.5667	0.6268	0.7121	0.8319	1.0048	1.2686	1.7130	2.6069	5.2970	-					
16	0.6327	0.5163	0.4928	0.5021	0.5316	0.5786	0.6450	0.7358	0.8616	1.0417	1.3155	1.7756	2.7004	5.4821	-				
17	0.6253	0.5051	0.4772	0.4809	0.5030	0.5403	0.5929	0.6640	0.7597	0.8908	1.0776	1.3609	1.8363	2.7909	5.6613	-			
18	0.6188	0.4955	0.4638	0.4629	0.4793	0.5090	0.5514	0.6084	0.6836	0.7835	0.9195	1.1127	1.4051	1.8951	2.8787	5.8350	-		
19	0.6131	0.4871	0.4522	0.4476	0.4593	0.4830	0.5176	0.5640	0.6245	0.7032	0.8070	0.9477	1.1469	1.4480	1.9523	2.9639	6.0037	-	
20	0.6081	0.4797	0.4421	0.4343	0.4422	0.4610	0.4895	0.5279	0.5775	0.6410	0.7228	0.8301	0.9752	1.1803	1.4898	2.0079	3.0467	6.1678	-

ความเบ้ กล่าวคือ $a > \frac{3}{2}$ และ $b > \frac{3}{2}$ เนื่องจากข้อจำกัดของโมเมนต์อันดับที่ 3 รอบค่าเฉลี่ยโดยค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ไม่มีขอบเขตบนและล่าง และยังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เมื่อ $a = \alpha$ และ $b = \gamma$ จะมีขนาดความเบ้เท่ากับเมื่อ $a = \gamma$ และ $b = \alpha$ แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม เนื่องจากสมบัติของฟังก์ชันคู่หรือกล่าวว่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเมื่อ $a = \alpha$ และ $b = \gamma$ จะเป็นภาพสะท้อนกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเมื่อ $a = \gamma$ และ $b = \alpha$ ซึ่งสอดคล้องกับผลงานวิจัยของแรมเบิร์ก ดูดวิคซ์ ทาดิกามาลา และมีคิตกะ (Ramberg *et al.*, 1979)

ข้อจำกัดในการหาค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งคือ $a > 2$ และ $b > 2$ เนื่องจากสมบัติของโมเมนต์ศูนย์กลางอันดับที่ 4 และพบว่าถ้า $a = \alpha$ และ $b = \gamma$ จะมีค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเมื่อค่าพารามิเตอร์ $a = \gamma$ และ $b = \alpha$ เนื่องจากสมบัติของฟังก์ชันคู่

ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีข้อจำกัดคือ $a > 1$ และ $b > 1$ เนื่องจากสมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่พิจารณาเฉพาะค่าพารามิเตอร์ $a > b$ เพื่อทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าบวก โดยที่การกระจายของการแจกแจงจะมีค่าน้อยลงถ้า a มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ b คงที่ ในกรณี $a = b$ ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันไม่นิยามซึ่งสอดคล้องกับการแจกแจงทีของสติวเดนท์ เนื่องจากค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

สำหรับในการวิจัยครั้งต่อไป ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะว่าควรมีการศึกษาวิธีการวัดสัมประสิทธิ์ความเบ้และความโด่งวิธีอื่นๆ เนื่องจากการวัดสัมประสิทธิ์ความโด่งที่ศึกษานั้นมีข้อด้อยคือไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ทุกค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง นอกจากนี้สมควรศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงทีแบบเบ้กับการแจกแจงแบบอื่นๆ เช่น การแจกแจงทีแบบเบ้ของเพียร์สันรูปแบบที่สี่ (Heinrich, 2004) เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1965. Handbook of mathematical functions, Dover Publications, New York.

Heinrich, J. 2004. A Guide to the Pearson Type IV distribution, http://www-cdf.fnal.gov/publications/cdf6820 - pearson 4. pdf [November 19, 2004].

Jone, M.C. and Faddy, M. 2003. A skew extension of the t distribution, with applications. Journal of Royal Statistical Society: Series B, 65: 159-174.

Monagan, M.B., Geddes, K.O., Heal, K.M., Labahn, G., Vorkoetter, S.M., McCarron, J., and DeMacro, P. 2002. Maple 8 Introductory Programming Guide, Waterloo Maple Inc., Waterloo, ON.

Ramberg, J.S., Dudewicz, E.J., Tadikamalla, P.R., and Mykytka, E.F. 1979. A probability distribution and its uses in fitting data. Technometrics, 21: 377-378.